

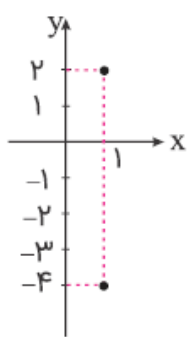
نام و نام خانوادگی: .....  
 مقطع و رشته: یازدهم ریاضی  
 نام پدر: .....  
 شماره داوطلب: .....  
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران  
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ  
 آزمون پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹

نام درس: آمار و احتمال  
 نام دبیر: یوسف باقری  
 تاریخ امتحان: ۱۹ / ۰۳ / ۱۴۰۰  
 ساعت امتحان: ۰۸ : ۳۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر		نمره به عدد:	نمره به حروف:
		نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:
		نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
ردیف	سؤالات	نمره به عدد:	نمره به حروف:
۱	عبارت زیر را به زبان منطق گزاره‌ها بنویسید: یا جای من اینجاست یا جای تو.		
۱	مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیرمجموعه دارد که شامل ۱ و ۲ باشد اما ۳ را نداشته باشد؟		
۱	اگر $A = \{x   x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2x = 8\}$ و $B = \{x   x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 4\}$ مفروض باشند، مجموعه $A - (B \times A)$ را مشخص کنید و سپس نمودار آن را رسم کنید.		
۱	نقاط $A(1, 1)$ ، $B(2, -1)$ و $C(-1, 2)$ مفروض‌اند. یکی از سه پاره‌خط $A$ ، $AC$ یا $BC$ را که احتمال انتخاب آن‌ها متناسب با طول آن‌ها می‌باشد انتخاب می‌کنیم. احتمال انتخاب $AB$ کدام است؟		
۱	یکی از مضارب طبیعی عدد ۳ که کوچکتر از ۲۰۰ باشد را به تصادف انتخاب می‌کنیم. شانس انتخاب هر عدد متناسب با تعداد ارقام آن عدد است. چقدر احتمال دارد عدد انتخابی مضرب ۵ هم باشد؟		
۱	فرض کنید از بین ۵ کارت با شماره‌های ۱ تا ۵ کارتی به تصادف انتخاب کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب کنیم اگر سکه ۲ بار رو بیاید احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟		
۱	دو تاس را آن قدر می‌اندازیم تا مجموع اعداد رو شده ۶ شود. چقدر احتمال دارد در پرتاب دوم این اتفاق رخ دهد؟		
۱	در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. مهره‌ای به تصادف برمی‌داریم و همراه با دو مهره از رنگ مخالفش از کیسه کنار می‌گذاریم، سپس مهره دیگری برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد مهره آخر سفید باشد؟		
۱	دو کیسه داریم، در اولی ۳ سفید و ۴ سیاه و در دومی ۴ سفید و ۳ سیاه است. کیسه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم و دو مهره از آن برمی‌داریم. احتمال اینکه دو مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟		
۱	فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را به مجموعه‌های $B_1 = \{1, 2\}$ ، $B_2 = \{3, 4\}$ و $B_3 = \{5\}$ افراز می‌کنیم. عددی از $S$ انتخاب می‌کنیم. اگر این عدد فرد باشد، چقدر احتمال دارد متعلق به $B_1$ باشد؟		
۱	دو جعبه داریم که در اولی ۵ لامپ سالم و ۷ خراب و در دومی ۸ لامپ سالم و ۴ خراب است. جعبه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و لامپی را برمی‌داریم. اگر لامپ سالم باشد، چقدر احتمال دارد مربوط به جعبه دوم باشد؟		
۱	در یک آزمون ۴ گزینه‌ای ۸ سوال مطرح است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سوالات به تصادف پاسخ دهد، احتمال اینکه فقط به ۳ سوال پاسخ درست داده باشد چقدر است؟		
۱	اعداد ۱ تا ۵ را روی ۵ کارت می‌نویسیم و به تصادف و پشت سرهم دو کارت از بین آن‌ها بدون جایگذاری مجدد برمی‌داریم. احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده ۶ شود کدام است؟		
۱	اگر فراوانی نسبی را در ۱۰۰ ضرب کنیم چه عاملی به دست می‌آید؟		

ردیف	سؤالات	نمره										
۱	دامنه تغییرات داده‌های ۱۱، ۱۹، ۱۲، $a$ ، ۳، ۵ برابر ۲۱ است. مقادیر ممکن برای $a$ را بیابید.	۱۵										
۱	جدول زیر مربوط به بررسی تعداد زدگی‌ها در ۷۰ توپ پارچه است. فراوانی و فراوانی نسبی را تعیین کرده و نمودار میله‌ای فراوانی را رسم کنید.	۱۶										
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>داده‌ها</th> <th>درصد فراوانی نسبی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td>۲۰</td> </tr> <tr> <td>۱</td> <td>۶۰</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۱۰</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>۱۰</td> </tr> </tbody> </table>	داده‌ها	درصد فراوانی نسبی	۰	۲۰	۱	۶۰	۲	۱۰	۳	۱۰	
داده‌ها	درصد فراوانی نسبی											
۰	۲۰											
۱	۶۰											
۲	۱۰											
۳	۱۰											
۱	در روانشناسی سلامت متغیرهای روان‌شناختی در چند نقش بررسی می‌شوند؟ نام ببرید.	۱۷										
۱	میانگین و واریانس داده‌های $3 + \frac{x_1}{2}, 3 + \frac{x_2}{2}, \dots, 3 + \frac{x_n}{2}$ به ترتیب ۹ و ۱ می‌باشد. ضریب تغییرات داده‌های $6x_1 - 1, 6x_2 - 1, \dots, 6x_n - 1$ کدام است؟	۱۸										
۱	میانگین و واریانس قبل از چارک اول، درون جعبه و بعد از چارک سوم داده‌های ۲، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ را به دست آورید.	۱۹										
۱	در نمودار جعبه‌ای ۲۰ داده آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه به ترتیب ۷ و ۱۵ است. اگر میانگین تمام داده‌ها ۱۳ باشد، میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟	۲۰										
<b>« سوالات امتیازی »</b>												
۱	در یک تحقیق می‌خواهیم میانگین نمرات ریاضی دانش‌آموزان شهر تهران را برای هر مدرسه مورد بررسی قرار دهیم. ده مدرسه به تصادف انتخاب می‌کنیم. مشخص کنید واحد آماری، جامعه آماری، نمونه و روش نمونه‌گیری چیست؟	۲۱										
۱	داده‌های یک جامعه آماری به صورت ۶۰۱، ...، ۱۳، ۱۰، ۷، ۴ است. نمونه‌هایی دوتایی برای برآورد میانگین جامعه انتخاب می‌کنیم. مشخص کنید احتمال اینکه میانگین نمونه با میانگین جامعه یکسان برآورد شود چقدر است؟	۲۲										
۱	مدیر مدرسه‌ای علاقه‌مند است میانگین نمره ریاضی دانش‌آموزان سال جاری را بداند. او نمونه‌ای تصادفی شامل ۱۶ نفر انتخاب می‌کند که میانگین ریاضی آن‌ها ۱۷ است. انحراف معیار بررسی نمره ریاضی در قبل ۱/۵ بوده است. در بازه اطمینان ۹۵٪ میانگین نمره ریاضی را محاسبه کنید.	۲۳										
صفحه ۲ از ۲												

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	منظور این عبارت این است که جای من و تو با هم، اینجا نیست، در نتیجه: $\left. \begin{array}{l} p = \text{جای من اینجا است} \\ q = \text{جای تو اینجا است} \end{array} \right\} \Rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	
۲	در این حالت باید ۱، ۲ و ۳ را کنار گذاشته با بقیه اعضا زیرمجموعه بسازیم. بقیه اعضا ۴، ۵، ۶، ۷ هستند که با آن‌ها ۲ <sup>۴</sup> یعنی ۱۶ زیرمجموعه ساخته می‌شود.	
۳	$A = \{-4, 2\}, \quad B = \{1, 2\}$ $A^2 = \{(-4, -4), (-4, 2), (2, -4), (2, 2)\}$ $B \times A = \{(1, -4), (1, 2), (2, 2)\}$ $\Rightarrow (B \times A) - A^2 = \{(1, -4), (1, 2)\}$ 	
۴	ابتدا طول هر کدام از پاره‌خطها را حساب می‌کنیم: $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$ $AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$ $BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ <p>حال داریم:</p> $P(AB) + P(AC) + P(BC) = 1$ $\sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 3\sqrt{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}$ $x = \frac{1}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{20 - 18} = \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{2}$ <p>بنابراین احتمال انتخاب پاره‌خط AB برابر است با:</p> $P(AB) = \sqrt{5}x = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})}{2} = \frac{10 - 3\sqrt{10}}{2}$	

$$S = \{3, 6, 9, 12, \dots, 198\}$$

تعداد اعداد یک رقمی، دو رقمی و سه رقمی عبارت است از:

$$3 = \text{تعداد اعداد یک رقمی}$$

$$\text{تعداد اعداد دو رقمی} = \frac{99 - 12}{3} + 1 = 30$$

$$\text{تعداد اعداد سه رقمی} = \frac{198 - 102}{3} + 1 = 33$$

پس داریم:

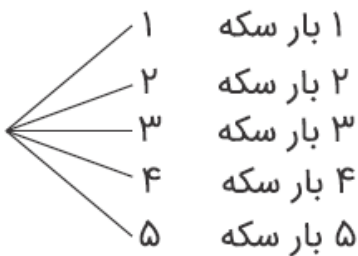
$$3x + 30 \times 2x + 33 \times 3x = 1 \Rightarrow 162x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{162}$$

مضارب ۵ که مضارب ۳ هستند به صورت زیر می باشد:

$$A = \{15, 30, \dots, 195\} \Rightarrow |A| = \frac{195 - 15}{15} + 1 = 13$$

که ۶تای آن دو رقمی و ۷تای آن سه رقمی هستند. بنابراین:

$$P(A) = 6 \times 2x + 7 \times 3x = 12x + 21x = 33x = 33 \times \frac{1}{162} = \frac{11}{54}$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{هم کارت شماره ۳ هم سکه ۲ بار رو}}{\text{سکه ۲ بار رو}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} \times \frac{\frac{3}{8}}{\frac{42}{3}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{42}{3}} = \frac{2}{7}$$

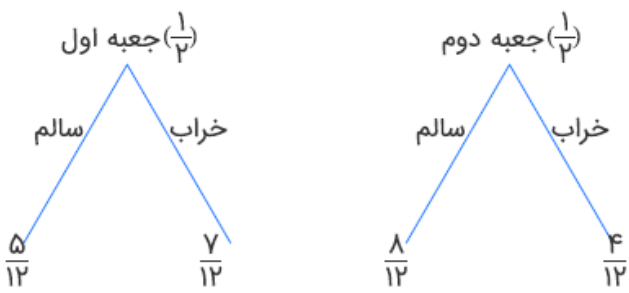
اگر سکه دو بار رو بیاید حالات زیر را داریم:

سکه ۲ بار رو و کارت عدد ۵ یا سکه ۲ بار رو و کارت عدد ۴ یا سکه ۲ بار و کارت عدد ۳ یا سکه ۲ بار رو و کارت عدد ۲ یا سکه ۲ بار و کارت عدد ۱ بیاید.

$$P(B) = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{2}{2}}{2^2} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{3}{2}}{2^3} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{4}{2}}{2^4} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{5}{2}}{2^5}$$

$$P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{6}{16} + \frac{1}{5} \times \frac{10}{32}$$

$$P(B) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{6}{16} + \frac{10}{32} \right) = \frac{1}{5} \times \frac{8 + 12 + 12 + 10}{32} = \frac{1}{5} \times \frac{42}{32}$$

<p>۵ حالت: مجموع دو تاس ۶ <math>\Rightarrow \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}</math></p> <p>۳۱ حالت: مجموع دو تاس ۶ نشود.</p> <p>برای اینکه در پرتاب دوم مجموع ۶ شود باید در پرتاب اول ۶ نشود، اگر <math>A_1</math> پیشامد مجموع ۶ شدن در پرتاب‌های مختلف باشد:</p> $P(A_1' \cap A_2) = P(A_1') \cdot P(A_2   A_1') = \frac{31}{36} \times \frac{5}{36} = \frac{155}{36^2}$	۷
<p>۸ احتمال خواسته شده را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:</p> <p>مهره دوم سفید باشد <math>\times</math> مهره اول سیاه باشد + مهره دوم سفید باشد <math>\times</math> مهره اول سفید باشد</p> $= \frac{5}{11} \times \frac{4}{8} + \frac{6}{11} \times \frac{3}{8} = \frac{38}{88} = \frac{19}{44}$	۸
<p>۹ احتمال خواسته شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم:</p> <p>احتمالاً هم‌رنگ بودن دو مهره در کیسه اول <math>\times</math> احتمال انتخاب کیسه اول + احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره در کیسه دوم <math>\times</math> احتمال انتخاب کیسه دوم</p> $= \frac{1}{2} \left[ \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{6+3}{21} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$	۹
<p>۱۰ فرض می‌کنیم پیشنهاد انتخاب عدد فرد <math>A</math> باشد، پس می‌خواهیم <math>P(B_1   A)</math> را حساب کنیم. طبق قاعده بیز می‌توانیم احتمال خواسته شده را به صورت زیر محاسبه کنیم.</p> $P(B_1   A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A   B_1)}{P(B_1) \cdot P(A   B_1) + P(B_2) \cdot P(A   B_2) + P(B_3) \cdot P(A   B_3)}$ $= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times 1} = \frac{2}{2+2+2} = \frac{1}{3}$	۱۰
<p>۱۱ ابتدا نمودار درختی را برای مسئله به صورت زیر رسم می‌کنیم:</p>  <p>احتمال خواسته شده عبارت است از:</p> $P(\text{سالم بودن}   \text{از جعبه دوم بودن}) = \frac{P(\text{سالم بودن} \cap \text{از جعبه دوم بودن})}{P(\text{سالم بودن})}$ $= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{8}{12}}{\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{12}} = \frac{8}{13}$	۱۱

$$p(A) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$\text{احتمال درست جواب دادن} = \frac{1}{4}$$

$$\text{احتمال غلط جواب دادن} = \frac{3}{4}$$

دقت شود در این حالت جابه‌جا شدن اعداد مهم است اما عدد تکراری مثل (۳, ۳) رخ نمی‌دهد، پس فضای نمونه دارای ۲۰ حالت به صورت زیر است:

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), \dots, (5, 4)\}$$

و فضای مطلوب برابر است با:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)\}$$

پس:

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

درصد فراوانی نسبی

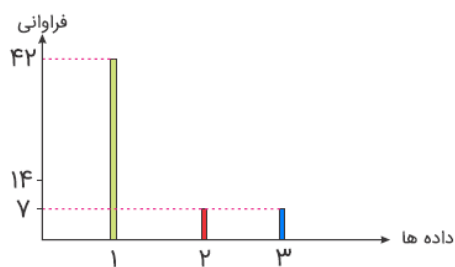
دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\text{حالت اول} \Rightarrow x_{\max} = a, x_{\min} = 3 \Rightarrow a - 3 = 21 \Rightarrow a = 24$$

$$\text{حالت دوم} \Rightarrow x_{\max} = 19, x_{\min} = a \Rightarrow 19 - a = 21 \Rightarrow a = -2$$

با توجه به جدول داده شده می‌توانیم از روی درصد فراوانی نسبی، مقادیر فراوانی و فراوانی نسبی را به ترتیب زیر پیدا کنیم و سپس نمودار را رسم کنیم.

داده‌ها	درصد فراوانی نسبی	فراوانی نسبی	فراوانی
۰	۲۰	$\frac{20}{100} = 0.2$	$0.2 \times 70 = 14$
۱	۶۰	$\frac{60}{100} = 0.6$	$0.6 \times 70 = 42$
۲	۱۰	$\frac{10}{100} = 0.1$	$0.1 \times 70 = 7$
۳	۱۰	$\frac{10}{100} = 0.1$	$0.1 \times 70 = 7$



در دو نقش:

۱- عامل ایجاد بیماری‌های جسمانی

۲- پیامد بیماری‌های جسمانی

برای اینکه داده‌های به صورت  $\frac{x_i}{2} + 3$  به داده‌های به صورت  $6x_i - 1$  تبدیل شود باید آن‌ها را در ۱۲ ضرب کرده و ۳۷ واحد کم کنیم، زیرا:

$$12\left(\frac{x_i}{2} + 3\right) - 37 \Rightarrow 6x_i + 36 - 37 \Rightarrow 6x_i - 1$$

پس میانگین جدید برابر است با:

$$\bar{x} = 12 \times 9 - 37 = 108 - 37 = 71$$

و واریانس جدید برابر است با:

$$\sigma^2 = (12)^2 \times 1 \Rightarrow \sigma = 12$$

بنابراین ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12}{71}$$

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2$$

↓

$$Q_1=1 \quad Q_2=1 \quad Q_3=1$$

داده‌های قبل از  $Q_1$   $\Rightarrow 1, 1 \Rightarrow \bar{x} = 1, \sigma^2 = 0$

داده‌های درون جعبه  $\Rightarrow 1, 1, 1, 1, 1 \Rightarrow \bar{x} = 1, \sigma^2 = 0$

داده‌های بعد از  $Q_3$   $\Rightarrow 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 1/5 \\ \sigma^2 = \frac{0/25 + 0/25}{2} = 0/25 \end{cases}$

با توجه به اینکه ۲۰ داده داریم، ۵ داده قبل از جعبه، ۱۰ داده درون جعبه و ۵ داده بعد از جعبه موجود است.

داده‌های قبل از جعبه:  $a_i$

داده‌های درون جعبه:  $b_i$

داده‌های بعد از جعبه:  $c_i$

$$\begin{cases} \text{برای داده‌های قبل از جعبه} \Rightarrow \sum a_i = 5 \times 7 = 35 \\ \text{برای داده‌های بعد از جعبه} \Rightarrow \sum c_i = 5 \times 15 = 75 \end{cases} \Rightarrow \sum a_i + \sum c_i = 35 + 75 = 110$$

میانگین کل برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum a_i + \sum b_i + \sum c_i}{n} \Rightarrow 13 = \frac{110 + \sum b_i}{20} \Rightarrow 260 = 110 + \sum b_i \Rightarrow \sum b_i = 150$$

یعنی مجموع داده‌های جعبه ۱۵۰ می‌باشد، پس میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\bar{b} = \frac{\sum b_i}{n} = \frac{150}{10} = 15$$

دقت کنید که در این بررسی واحد آماری مدارس است و جامعه آماری کل مدارس تهران می‌باشد. نمونه ۱۰ مدرسه‌ای است که انتخاب شده و روش نمونه‌گیری به صورت تصادفی می‌باشد.

<p>داده‌ها به صورت یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۳ و ضابطه <math>a_n = 3n + 1</math> است، تعداد جملات برابر است با:</p> $a_n = 3n + 1 = 601 \Rightarrow 3n = 600 \Rightarrow n = 200$ <p>یعنی ۲۰۰ داده موجود است. میانگین جامعه برابر است با:</p> $\mu = \frac{4 + 7 + \dots + 601}{200} = \frac{\frac{200}{2}(4 + 601)}{200} = \frac{605}{2}$ <p>تعداد نمونه‌های دوتایی که میانگین آن‌ها <math>\frac{605}{2}</math> شود برابر ۱۰۰ است؛ زیرا این نمونه‌ها عبارتند از:</p> $(a_1, a_{199}), (a_2, a_{198}), \dots, (a_{100}, a_{101}) \Rightarrow n = 100$ <p>پس احتمال خواسته شده برابر است با:</p> $P(A) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$	<p>۲۲</p>
<p>رابطه برآورد را به صورت زیر می‌نویسیم:</p> $\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 17 - \frac{2 \times 1/5}{\sqrt{16}} \leq \mu \leq 17 + \frac{2 \times 1/5}{\sqrt{16}}$ $17 - \frac{3}{4} \leq \mu \leq 17 + \frac{3}{4} \Rightarrow 16/25 \leq \mu \leq 17/75$	<p>۲۳</p>
<p>نام و نام خانوادگی مصحح : یوسف باقری</p>	<p>جمع بارم: ۲۳ نمره</p>

امضاء: