

نام و نام خانوادگی:

مقطع و رشته: یازدهم ریاضی

نام پدر:

شماره داوطلب:

جمهوری اسلامی ایران

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۴ تهران

دبیرستان غیردولتی سرای دانش واحد رسالت

آزمون میان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

نام درس: حسابان

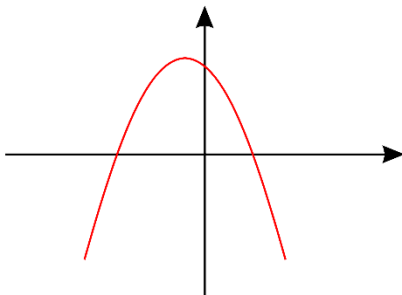
نام دبیر: مرجان بیدار

تاریخ امتحان: ۲۸ / ۰۸ / ۱۴۰۲

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

نام و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:
نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:
نام	سؤالات	نمره
۲	در یک دنباله حسابی با جمله ی اول ۵، مجموع ۸ جمله ی اول برابر ۵۴ است. مجموع ۱۰ جمله ی اول این دنباله چند است؟	۱
۱	اگر $12x - 4$ ، $5x$ ، $2x + 1$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت این دنباله هندسی را بیابید.	۲
۲	در یک دنباله ی هندسی مجموع سه جمله ی اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله ی اول ۱۲۶ است. جمله ی نهم چند برابر جمله ی هفتم است؟	۳
۱	نمودار مقابل، نمودار مربوط به سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. تعداد ریشه ها، علامت ریشه ها و علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنید.	۴



۱	<p>معادله‌ی زیر را حل کنید.</p> $(4-x^2)^2 - 2(4-x^2) - 15 = 0$	۵
۱	<p>بیش‌ترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید.</p>	۶
۲	<p>در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها ۲ واحد کم‌تر از جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب معادله را بدست آورید.</p>	۷
۱	<p>معادله‌ی مقابل را حل کنید.</p> $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$	۸
۱/۵	<p>معادله‌ی مقابل را حل کنید.</p> $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$	۹

۲	<p>تابع $f(x) = x-1 + x-3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید، سپس نمودار آن را رسم کنید و به کمک نمودار، بُرد آن را مشخص کنید.</p>	۱۰
۱	<p>نامعادله‌ی زیر را حل کنید و محدوده x را مشخص کنید.</p> $ 3x - 7 < 11$	۱۱
۲	<p>اگر $A(3, -2)$ و $B(5, 2)$ دو نقطه در صفحه‌ی مختصات باشند. معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را بدست آورید.</p>	۱۲
۱/۵	<p>مقدار k را چنان بیابید که دو خط زیر بر هم عمود باشند:</p> $d: (k-1)x + 5y + 3 = 0$ $d': (2k+1)x + 2y - 6 = 0$	۱۳
۱	<p>مقدار m چند باشد تا فاصله‌ی نقطه‌ی $P(m, 2)$ از خط $3x + 4y - 2 = 0$ برابر با ۲ باشد؟</p>	۱۴

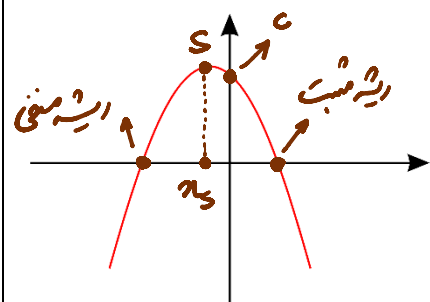


<p>۲</p>	<p>در یک دنباله حسابی با جمله ی اول ۵، مجموع ۸ جمله ی اول برابر ۵۴ است. مجموع ۱۰ جمله ی اول این دنباله چند است؟</p> <p> $a_1 = 5$ $S_8 = 54$ </p> <p> $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + d(n-1)]$ $S_8 = \frac{8}{2} [2 \times 5 + d(8-1)] \Rightarrow 54 = 4 [2 \times 5 + 7d]$ $\Rightarrow \frac{54}{4} = 10 + 7d$ $\Rightarrow 13,5 = 10 + 7d$ $\Rightarrow 3,5 = 7d$ $\Rightarrow d = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2}$ </p> <p> $\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 5 + \frac{1}{2} \times 9] = 5 [10 + 4,5] = 5 \times 14,5 = 72,5$ $\Rightarrow \boxed{S_{10} = 72,5}$ </p>	<p>۱</p>
<p>۱</p>	<p>اگر $12x - 4$، $5x$، $2x + 1$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت این دنباله هندسی را بیابید.</p> <p> $(2x+1)(12x-4) = (5x)^2 \Rightarrow 24x^2 - 8x + 12x - 4 = 25x^2$ $\Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$ \Rightarrow جملات دنباله: $0, 10, 20 \Rightarrow q = \frac{10}{5} = 2$ </p>	<p>۲</p>
<p>۲</p>	<p>در یک دنباله ی هندسی مجموع سه جمله ی اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله ی اول ۱۲۶ است. جمله ی نهم چند برابر جمله ی هفتم است؟</p> <p> $S_n = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow \begin{cases} S_3 = a_1 \times \frac{q^3 - 1}{q - 1} \\ S_6 = a_1 \times \frac{q^6 - 1}{q - 1} \end{cases} \rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{q^3 - 1}{q^6 - 1}$ </p>	<p>۳</p>

$$\Rightarrow \frac{112}{126} = \frac{q^3 - 1}{(q^3 - 1)(q^3 + 1)} \Rightarrow \frac{1}{q^3 + 1} = \frac{112}{126} = \frac{08}{09} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow q^3 + 1 = \frac{9}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_9}{a_6} = \frac{a_1 q^9}{a_1 q^6} = q^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$



نمودار مقابل، نمودار مربوط به سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. تعداد ریشه‌ها، علامت ریشه‌ها و علامت ضرایب a و b و c را مشخص کنید.

- تعداد ریشه‌ها ← دوتا ، زیرا نمودار سهمی محور x را در دو نقطه قطع کرده است

- علامت ریشه‌ها ← ای مثبت و دیگری منفی است

- علامت a ← منفی است زیرا دانه‌ها یکی رو به پایین است

- علامت b ← منفی است $\frac{b}{a} > 0$ $\frac{a}{b} < 0$ $\Rightarrow \frac{b}{a} > 0$ $\Rightarrow \frac{a}{b} < 0$ $\Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} < 0$


- علامت c ← مثبت است زیرا نمودار سهمی محور y را در قسمت مثبت y قطع می‌کند.

معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$(4-x^2)^2 - 2(4-x^2) - 15 = 0 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} 4-x^2 = k$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k - 15 = 0 \Rightarrow (k-5)(k+3) = 0 \begin{cases} k-5=0 \Rightarrow k=5 \\ k+3=0 \Rightarrow k=-3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=5 \Rightarrow 4-x^2=5 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{حساب ندارد} \\ k=-3 \Rightarrow 4-x^2=-3 \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow \boxed{x = \pm \sqrt{7}} \end{array} \right.$$

۱	<p>بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید.</p>  $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$f_{max} = 5$</div> $y_s = f(x_s) \Rightarrow y_s = f(2) = -2^2 + 4(2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5 \uparrow$	۶
۲	<p>در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جوابها ۲ واحد کمتر از جواب دیگر باشد، m و هر دو جواب معادله را بدست آوریم α، β این معادله باشند:</p> $\beta = \alpha - 2 \oplus$ $S = \alpha + \beta \xrightarrow{\oplus} \frac{-b}{a} = \alpha + \alpha - 2 \Rightarrow \frac{-(-8)}{2} = 2\alpha - 2 \Rightarrow 2\alpha = 6$ $\Rightarrow \alpha = 3$ $\Rightarrow \beta = 3 - 2 = 1$ $P = \alpha\beta \rightarrow \frac{c}{a} = \alpha\beta \rightarrow \frac{m}{2} = 3 \times 1 \Rightarrow m = 6$	۷
۱	<p>معادله‌ی مقابل را حل کنید.</p> $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \rightarrow \sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{توان دو}}$ $(\sqrt{3x+1})^2 = (4 - \sqrt{x+3})^2 \Rightarrow 3x+1 = 16 + (x+3) - 8\sqrt{x+3}$ $\Rightarrow 3x+1 - 16 - x - 3 = -8\sqrt{x+3} \Rightarrow 2x - 18 = -8\sqrt{x+3}$ $\Rightarrow x - 9 = -4\sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{توان دو}} (x-9)^2 = (-4\sqrt{x+3})^2$ $\Rightarrow x^2 - 18x + 81 = 16(x+3) \Rightarrow x^2 - 18x + 81 - 16x - 48 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0 \Rightarrow (x-33)(x-1) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x-33=0 \Rightarrow x=33 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$ <p><u>آزمایش جواب:</u></p> $\begin{cases} x=33 \rightarrow \sqrt{33+3} + \sqrt{3(33)+1} = \sqrt{36} + \sqrt{100} = 6+10=16 \neq 4 \\ x=1 \rightarrow \sqrt{1+3} + \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2+2=4 \end{cases}$ <p>$x=33$ غیرقابل قبول است بنابراین تنها جواب معادله $x=1$ می باشد.</p>	۸

۱/۵

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \xrightarrow{x(x-2)} 5(x-2) - 4 = x(x-4)$$

$$\Rightarrow 5x - 10 - 4 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ X} \\ x=7 \text{ ✓} \end{cases} \rightarrow \text{گزینه قبل نیست زیرا زوج} \Rightarrow \boxed{x=7}$$

گزینه صحیح است

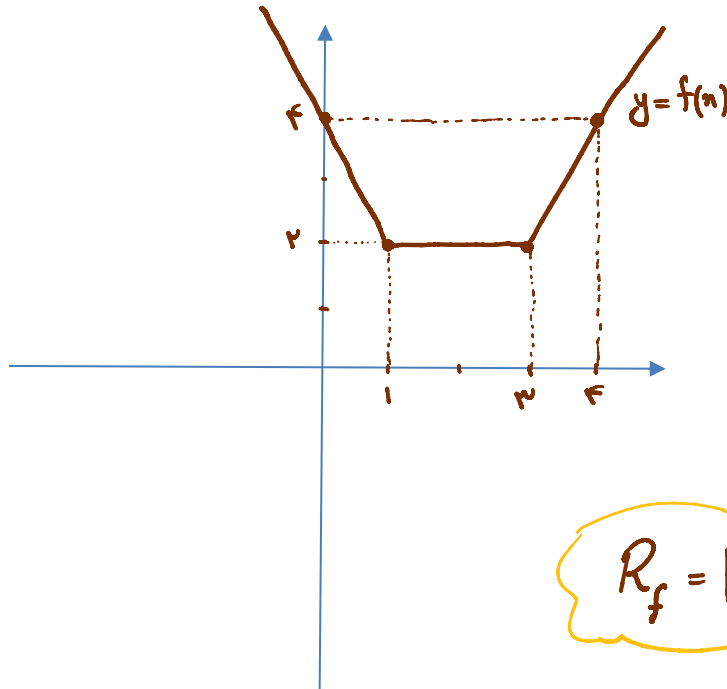
تابع $f(x) = |x-1| + |x-3|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید و به کمک نمودار، بُرد آن را مشخص کنید.

$$\boxed{1} \quad x \geq 3 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-3| = x-1 + x-3 = 2x-4$$

$$\boxed{2} \quad 1 \leq x < 3 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-3| = x-1 - x+3 = 2$$

$$\boxed{3} \quad x < 1 \Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-3| = -x+1 - x+3 = -2x+4$$

$$\Rightarrow f(x) = |x-1| + |x-3| = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 3 \\ 2 & 1 \leq x < 3 \\ -2x+4 & x < 1 \end{cases}$$



بازرسی به نمودار :

$$R_f = [2, +\infty)$$

۲

نامعادله‌ی زیر را حل کنید و محدوده x را مشخص کنید.

۱

$$|3x-7| < 11 \Rightarrow -11 < 3x-7 < 11$$

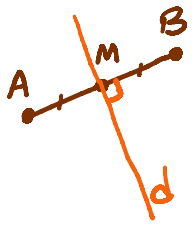
$$\Rightarrow -11+7 < 3x < 11+7$$

$$\Rightarrow -4 < m_n < 18$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{2} < n < 4$$

اگر $A(3, -2)$ و $B(5, 2)$ دو نقطه در صفحه‌ی مختصات باشند. معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را بدست آورید.

۱۲



نقطه‌ی میانی پاره‌خط $AB \rightarrow$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \end{cases}$$

شیب پاره‌خط AB

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-2)}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2$$

$d \perp AB \Rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{AB}} \Rightarrow m_d = \frac{-1}{2}$

معادله‌ی خط d :

$$y - y_M = m_d (x - x_M)$$

$$y - 0 = \frac{-1}{2} (x - 4)$$

$$y = \frac{-1}{2} x + 2$$

مقدار k را چنان بیابید که دو خط زیر بر هم عمود باشند:

۱۳

$d: (k-1)x + 5y + 3 = 0 \rightarrow m_d = \frac{-(k-1)}{5} = \frac{1-k}{5}$

$d': (2k+1)x + 2y - 6 = 0 \rightarrow m_{d'} = \frac{-(2k+1)}{2} = \frac{-2k-1}{2}$

۱/۵

$d \perp d' \Rightarrow m_{d'} = \frac{-1}{m_d} \Rightarrow m_d \times m_{d'} = -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-k}{5}\right) \left(\frac{-2k-1}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{-2k-1+2k^2+k}{10} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2k^2-k-1}{10} = -1 \Rightarrow 2k^2-k-1 = -10$$

$$\Rightarrow 2k^2 - k + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(2)(9) = 1 - 72 = -71$$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد \Rightarrow به ازای هیچ مقداری از k این دو خط برهم نمی‌خورند.

مقدار m چند باشد تا فاصله‌ی نقطه‌ی $P(m, 2)$ از خط $3x + 4y - 2 = 0$ برابر با ۲ باشد؟

۱۴

$$\frac{|3m + 4(2) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|3m + 6|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow |3m + 6| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 3m + 6 = 10 \Rightarrow 3m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{3} \\ 3m + 6 = -10 \Rightarrow 3m = -16 \Rightarrow m = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح: مرجان بیدار

جمع بارم: ۲۰ نمره