

نام و نام خانوادگی: مقطع و رشته: متوسطه دوم ریاضی نام پدر: شماره داوطلب: تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه	جمهوری اسلامی ایران اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰	نام درس: ریاضیات گسسته دوازدهم ریاضی نام دبیر: یوسف باقری تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲ ساعت امتحان: ۱۰:۳۰ صبح / عصر
---	--	---

نمره به عدد:		نمره به حروف:		نمره تجدید نظر به عدد:		نمره به حروف:	
نام دبیر:		تاریخ و امضاء:		نام دبیر:		تاریخ و امضاء:	
ردیف		سؤالات					
۱		ثابت کنید حاصل جمع پنج برابر یک عدد زوج با یک عدد فرد، عددی فرد است.					
۲		ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $a + b > 0$ ، آنگاه رابطه زیر برقرار می‌باشد. $\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$					
۳		اگر a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$					
۴		اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.					

۵	برای اعداد صحیح a و b اگر $a + b \mid a - b$ ، ثابت کنید $a + b \mid 4ab$.	۲
۶	مشخص کنید چند عدد طبیعی n هست که $n + 3 \mid n^2 + n + 2$.	۲
۷	اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n \mid 9k + 7$ و $n \mid 7k + 6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$.	۲
۸	a یک عدد طبیعی است که مضرب ۸ نیست ولی مضرب ۴ است. بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک $24 + \frac{a^2}{2}$ و ۱۲۸ را به دست آورید.	۲
۹	باقی‌ماندهٔ تقسیم $3^{3^0} + 2^{3^0}$ را بر ۶ به دست آورید.	۲
۱۰	ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $2 + 3^{4n+1}$ بر ۵ بخش‌پذیر است.	۲



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام درس: ریاضیات گسسته
 نام دبیر: یوسف باقری
 تاریخ امتحان: ۱۴۰۰/۱۰/۱۹
 ساعت امتحان: صبح/عصر
 مدت امتحان: دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	برای حل از اثبات مستقیم استفاده می کنیم. عدد زوج را با $a = 2k$ و عدد فرد را با $b = 2k' + 1$ نمایش می دهیم، پس: $5a + b = 5(2k) + (2k' + 1) = 10k + 2k' + 1 = 2(5k + k') + 1$ $= 2k'' + 1 \quad \text{فرد}$ یعنی عدد حاصل فرد است.	
۲	$\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq (a + b)ab \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)ab$ $\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده ایم پس حکم برقرار است	
۳	$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b} \Rightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b \Rightarrow 2\sqrt{ab} \geq 0$ درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است.	
۴	$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$	

علاوه بر رابطه داده شده در صورت مسئله، می دانیم که $a + b | a + b$. این دو رابطه را در یک دستگاه می نویسیم و طرف دوم آن ها را در خودشان ضرب می کنیم، یعنی:

$$\begin{cases} a + b | a - b \\ a + b | a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b | (a - b)^2 \\ a + b | (a + b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b | a^2 + b^2 - 2ab \\ a + b | a^2 + b^2 + 2ab \end{cases} \Rightarrow a + b | 4ab$$

رابطه آخر از کم کردن طرف های دوم حاصل شده است.

برای یافتن اعداد طبیعی n که در رابطه مسئله صدق کند، در کنار رابطه مسئله، رابطه $n + 3 | n + 3$ را در نظر گرفته و دستگاهی تشکیل می دهیم.

$$\begin{cases} n + 3 | n^2 + n + 2 \\ n + 3 | n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 | n^2 + n + 2 \\ n + 3 | n^2 + 3n \end{cases} \Rightarrow n + 3 | -2n + 2$$

رابطه فوق را دوباره در دستگاه زیر استفاده می کنیم.

$$\begin{cases} n + 3 | -2n + 2 \\ n + 3 | n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 | -2n + 2 \\ n + 3 | 2n + 6 \end{cases} \Rightarrow n + 3 | 8$$

یعنی $n + 3$ می تواند اعداد $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ باشد، پس:

$$n + 3 = 1 \Rightarrow n = -2 \quad \text{غ ق ق}$$

$$n + 3 = -1 \Rightarrow n = -4 \quad \text{غ ق ق}$$

$$n + 3 = 2 \Rightarrow n = -1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$n + 3 = -2 \Rightarrow n = -5 \quad \text{غ ق ق}$$

$$n + 3 = 4 \Rightarrow n = 1 \quad \text{ق ق}$$

$$n + 3 = -4 \Rightarrow n = -7 \quad \text{غ ق ق}$$

$$n + 3 = 8 \Rightarrow n = 5 \quad \text{ق ق}$$

$$n + 3 = -8 \Rightarrow n = -11 \quad \text{غ ق ق}$$

هر دو مقدار فوق برای n در شرط مسئله صدق می کنند.

$$\begin{cases} n | (9k + 7) \times (-7) \\ n | (7k + 6) \times 9 \end{cases} \Rightarrow n | -63k - 49 + 63k + 54 \Rightarrow n | 5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } 5$$

۸	اگر a مضرب ۸ نباشد ولی مضرب ۴ باشد به شکل $۸k + ۴$ است. پس: $a = ۸k + ۴ \Rightarrow a^۲ = ۶۴k^۲ + ۶۴k + ۱۶ \Rightarrow a^۲ = ۶۴k(k + ۱) + ۱۶$ چون $k(k + ۱)$ حاصلضرب دو عدد متوالی است پس زوج است، یعنی: $a^۲ = ۶۴ \times ۲t + ۱۶ \Rightarrow a^۲ = ۱۲۸t + ۱۶ \Rightarrow \frac{a^۲}{۲} = ۶۴t + ۸ \Rightarrow \frac{a^۲}{۲} + ۲۴ = ۶۴t + ۳۲$ $\Rightarrow \frac{a^۲}{۲} + ۲۴ = ۳۲(۲t + ۱)$ پس: $\left(\frac{a^۲}{۲} + ۲۴, ۱۲۸\right) = (۳۲(۲t + ۱), ۳۲ \times ۴) = ۳۲(۲t + ۱, ۴)$ چون $۲t + ۱$ فرد است، پس: $(۲t + ۱, ۴) = ۱ \Rightarrow d = ۳۲ \times ۱ = ۳۲$
۹	از رابطهٔ همنهشتی زیر استفاده می‌کنیم: $a^n + b^n \equiv (a + b)^n \xrightarrow[n=۳^o]{a=۲, b=۳} ۲^{۳^o} + ۳^{۳^o \times ۲} \equiv (۲ + ۳)^{۳^o}$ $\Rightarrow ۲^{۳^o} + ۳^{۳^o \times ۲} \equiv ۵^{۳^o}$ از طرفی می‌دانیم که: $۵^{\frac{r}{۲}} - ۱ \Rightarrow ۵^{۳^o \times \frac{r}{۲}} \equiv (-۱)^{۳^o} \Rightarrow ۵^{۳^o \times \frac{r}{۲}} \equiv ۱ \Rightarrow r = ۱$
۱۰	از همنهشتی استفاده می‌کنیم. پایهٔ ۳ را در پیمانهٔ ۵ بررسی می‌کنیم. $۳^۲ \equiv -۱ \Rightarrow (۳^۲)^{۲n} \equiv (-۱)^{۲n} \Rightarrow ۳^{۴n} \equiv ۱ \Rightarrow ۳^{۴n+۱} \equiv ۳ \Rightarrow ۳^{۴n+۱} + ۲ \equiv ۵$ $\Rightarrow ۳^{۴n+۱} + ۲ \equiv ۵$
نام و نام خانوادگی مصحح : امضاء:	
جمع بارم : ۲۰ نمره	