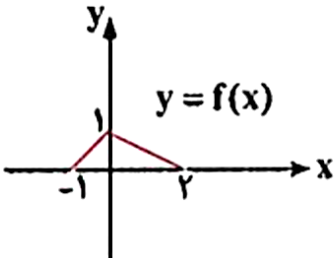
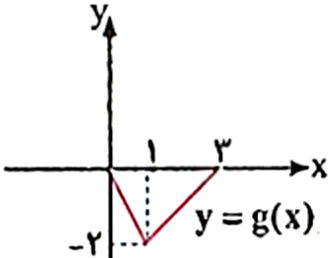


نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم تجربی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
 امتحانات نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵
 www.sarayedaneh.com
 ۰۲۱-۲۹۳۶

نام درس: ریاضی ۳
 نام دبیر: مرضیه بختیاری
 تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶
 ساعت امتحان: ۰۸:۳۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:	محل مهر و امضاء مدیر
		نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	
ردیف	سؤالات			بارم
۱	جاهای خالی را پر کنید الف) تعریف $\{x \in D_f f(x) \in D_g\}$ دامنه ی تابع ----- را نشان میدهد. ب) نقطه ی $(-۸, ۶)$ روی $y = f(x)$ با نقطه ی $(-۸, ۱۲)$ روی $y = \frac{1}{4}f(x)$ متناظر است. ج) تغییرات تابع تانژانت در ربع سوم برابر ----- است.			۱/۵
۲	مقادیر a را طوری پیدا کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; x \leq 2 \\ 2x+a & ; x > 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی اکیدا صعودی باشد.			۱
۳	اگر $f(x) = 3\sqrt{x} + 2$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 4$ ضابطه ی $g(x)$ را بدست آورید.			۱
۴	نمودار $y = f(x)$ و $y = af(x-b)$ داده شده است مقادیر a, b را مشخص می کند.			۱/۵
	 			
۵	اگر $y = \sqrt{x-2} - 2$ باشد وارون تابع را بنویسید و آن را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید.			۱
۶	اگر دامنه ی تابع $y = f(x)$ بصورت باشد دامنه تابع $y = 2f(1+2x) + 3$ را حساب کنید.			۱
۷	ضابطه تابع $y = asinbx$ بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -۳ و دوره تناوب آن π است.			۱
۸	نمودار تابع $y = \tan \frac{x}{4}$ را در یک دوره تناوب رسم کنید			۱

ردیف	سؤالات	بارم
۹	معادله های زیر را حل کنید. الف) $\cos 2x = \sin x$ ب) $\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$	۱/۵
۱۰	جواب معادله زیر را در بازه داده شده، تعیین کنید. $\cos x = \frac{1}{2} \quad x \in (0, \pi)$	۱/۵
۱۱	با توجه به شکل مقابل حد های زیر را پیدا کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow -2} x f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f^2(x)$	۱/۵
۱۲	اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} ((a-3)x + b - 1) = 4$ مقادیر a, b را تعیین کنید.	۱/۵
۱۳	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x x }{6x^2 + 1}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + \sqrt{x^4 + 2x + 1}}{3x^2}$ ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x}{(x+6)^2}$ ث) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{[x]}{ 3x+1 }$	۲
۱۴	با استفاده از تعریف مشتق مشتق تابع $y = x^2 - 3x$ را در نقطه $x = 2$ بیابید.	۱/۵
۱۵	فرض کنیم خط L مماس بر نمودار تابع f در نقطه ی (۵, ۴) است $f'(5), f(5)$ را بدست آورید.	۱/۵

جمع بarm: ۲۰ نمره



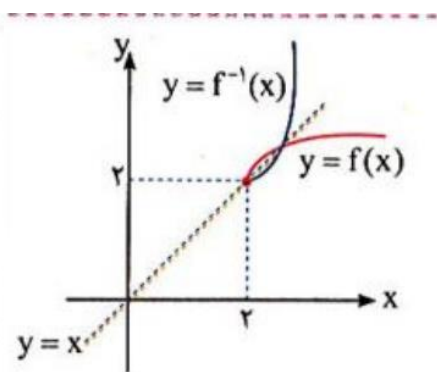
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
کلید سؤالات نیمسال اول سال تمصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴



www.sarayedanesh.com

نام درس: ریاضی ۳
نام دبیر: مرضیه بفتیاری
تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶
ساعت امتحان: ۸:۳۰ صبح / عصر
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر	بارم
۱	جاهای خالی را پر کنید الف) پایین تر ب) gof ج) برابر π است		۱/۵
۲	روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد، باید عرض تابع $2x + a$ به ازای $x = 2$ برابر ۴ یا بیش تر باشد (شکل را نگاه کنید). با جای گذاری $x = 2$ در $2x + a$ داریم: $2(2) + a \geq 4 \Rightarrow a \geq 0$		۱
۳	محاسبه می شود. $f(g(x)) = 3\sqrt{g(x)} + 2$ با مساوی هم قرار دادن ضابطه به دست آمده و ضابطه $f(g(x)) = 3x^2 - 4$ در سوال داریم: $3\sqrt{g(x)} + 2 = 3x^2 - 4 \Rightarrow 3\sqrt{g(x)} = 3x^2 - 6$ با تقسیم بر ۳ کردن دو طرف تساوی داریم: $\sqrt{g(x)} = x^2 - 2 \Rightarrow g(x) = (x^2 - 2)^2$		۱
۴	 بنابراین $a = -2$ و $b = 1$ است.		۱/۵



با توجه به نمودار، دامنه و برد توابع f و f^{-1} به صورت زیر است:

$$D_f = R_{f^{-1}} = [2, +\infty) \text{ و } R_f = D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

حال ضابطه f^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow y = \sqrt{x-2} + 2 \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = x-2 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 2$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x, y} y = (x-2)^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 2$$

۵

دامنه تابع $f(x)$ ، $[-1, 2]$ است، پس:

$$-1 < 1+2x \leq 2 \xrightarrow{-1} -2 < 2x \leq 1$$

$$\xrightarrow{+2} -1 < x \leq \frac{1}{2} \longrightarrow D_y = (-1, \frac{1}{2}]$$

۶

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \max(y) = |a| + c, \min(y) = -|a| + c$$

حال داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

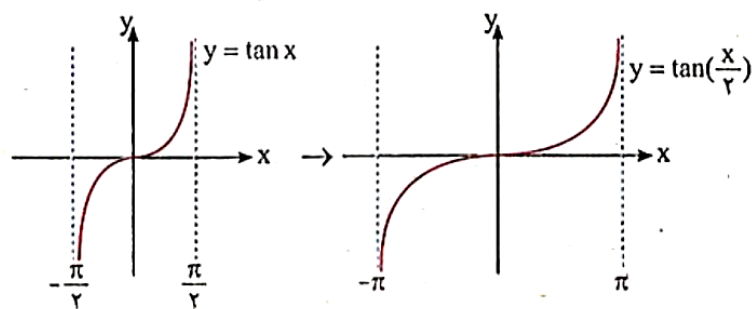
$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

پس ضابطه تابع می‌تواند به شکل‌های زیر باشد: $y = \pm 2 \sin(\pm 2x)$

۷

$$T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{|\frac{1}{2}|} = 2\pi$$

یک دوره تناوب این تابع دو برابر یک دوره تناوب تابع $y = \tan x$ است، پس:



۸

		۹
۱/۵	$\cos(2x) = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ با فرض $\sin x = t$ و بازنویسی معادله داریم: $2t^2 + t - 1 = 0$ معادله درجه دوم به دست آمده را به روش کلی (Δ) حل می‌کنیم: $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9, t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \end{cases}$ (ب) با توجه به اینکه $\sin x = t$ بوده باید معادلات $\sin x = \frac{1}{2}$ و $\sin x = -1$ را حل کنیم: $\begin{cases} \sin x = -1 \xrightarrow{\text{جواب خاص}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$ چون $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ است، پس می‌توان معادله را به صورت $\sin x = \sin(\frac{\pi}{6})$ نوشت: ۱) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ ۲) $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$	
۱/۵	$\cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow \begin{cases} 1) 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ 2) 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ پس با جایگذاری مقادیر صحیح k به جواب‌های موجود در بازه $(0, \pi)$ می‌رسیم: $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$	۱۰
۱/۵	$\lim_{x \rightarrow -2} xf(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x \times \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -2(+\infty) = -\infty$ ب) با توجه به نمودار تابع f، تساوی‌های $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ برقرار است، پس:	۱۱
۱/۵	$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$	۱۲
۲	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} f^2(x) = +\infty$ است. الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{6x^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	۱۳

	ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + \sqrt{x^4 + 2x + 1}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + \sqrt{x^4}}{3x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x^2 }{3x^2}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x}{(x+6)^2} = \frac{3(-6)}{0^+} = \frac{-18}{0^+} = -\infty$ د) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{ 3x+1 } = \frac{-1}{0^+} = -\infty$	
۱/۵	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ چون این حد دارای ابهام است، عبارت موجود در صورت کسر را تجزیه کرده و عامل ابهام را ساده می‌کنیم:	۱۴
۱/۵	$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} x - 1 = 1$ $f(5) = 4$ است. برای به دست آوردن $f'(5)$، کافی است شیب خط مماس بر تابع را در نقطه $x = 5$ یعنی همان خط L را محاسبه کنیم. دو نقطه $(5, 4)$ و $(0, 2)$ روی خط L واقع شده‌اند، برای به دست آوردن شیب خط L داریم: $f'(5) = m_L = \frac{4-2}{5-0} = \frac{2}{5}$	۱۵

