

نام و نام خانوادگی:

مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی

نام پدر:

شماره داوطلب:

تعداد صفحه: سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران

دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ

امتحانات نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

 www.sarayedanesh.com

 021-2936

نام درس: هندسه ۳

نام دبیر: آقای احمدی

تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۱۰

ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

نمره به عدد:		نمره به حروف:		نمره به عدد:		نمره به حروف:			
نام دبیر:		تاریخ و امضاء:		نام دبیر:		تاریخ و امضاء:			
ردیف		سؤالات						نمره	
۱		اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم مرتبه باشند نشان دهید ماتریس $A^t B + B^t A$ متقارن است.						۱,۵	
۲		فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^n را بدست آورید.						۱	
۳		اگر دو ماتریس زیر برابر باشند مقدار $x + y + z$ را بیابید. $\begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2x - y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$						۱	
۴		اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ با شرایط $a_{ij} = \begin{cases} 2i + j & i \geq j \\ 3i + 2j & i < j \end{cases}$ مفروض است. ماتریس $2A$ را بدست آورید.						۱,۲۵	
۵		اگر A ماتریسی اسکالر از مرتبه ۳ باشد و $a_{11} = 4$ در اینصورت دترمینان A را بیابید.						۱	
۶		اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را چنان بیابید که حاصلضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.						۱,۲۵	
۷		دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$						۱,۵	
۸		اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه ماتریس $2A^{-1}B$ را بیابید.						۱,۵	
۹		به ازای چه مقداری از m دستگاه زیر جواب ندارد. $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m - 1)x + y = 3 \end{cases}$						۱,۵	
۱۰		وضعیت دو دایره زیر را نسبت به هم مشخص کنید. $x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$						۱,۵	
صفحه ۱ از ۲									

۱۱	معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع ۲ بنویسید و همچنین نقاط برخورد آن با محورهای مختصات را بیابید .	۱,۵
۱۲	حدود a را طوری بیابید که معادله‌ی $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند یک دایره باشد.	۱
۱۳	دایره‌ای بر دو خط موازی مماس است که نقاط تماس $A(2, -3)$ و $B(4, 1)$ هستند. معادله‌ی این دایره را بنویسید.	۱,۵
۱۴	معادله دایره ای بنویسید که مرکزش نقطه $O(1, -2)$ و بر خط $-3x + 4y - 4 = 0$ مماس باشد.	۱,۵
۱۵	وضعیت خط به معادله $x + y = 4$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ را تعیین کنید.	۱,۵
صفحه ۲ از ۲		

جمع بارم : ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحدحافظ
کلید سؤالات نیمسال اول سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴
021-2936



www.sarayedanesh.com

نام درس: هندسه ۳
نام دبیر: آقای امدی
تاریخ امتحان: / ۱۴۰۴/۱۰
ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر
مدت امتحان: ۸۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	اثبات: ماتریس M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $M = A^t B + B^t A$ برای اثبات متقارن بودن M، کافی است نشان دهیم $M^t = M$. ۱. محاسبه ترانهاد M: $M^t = (A^t B + B^t A)^t$ ۲. با استفاده از خواص ترانهاد: $(X + Y)^t = X^t + Y^t, \quad (XY)^t = Y^t X^t$ پس: $M^t = (A^t B)^t + (B^t A)^t$ $M^t = B^t (A^t)^t + A^t (B^t)^t$ ۳. با توجه به $(A^t)^t = A$ و $(B^t)^t = B$: $M^t = B^t A + A^t B$ ۴. چون جمع ماتریس‌ها جابجایی است: $M^t = A^t B + B^t A$ ۵. مقایسه با M: $M^t = M$ پس ماتریس $M = A^t B + B^t A$ متقارن است.	
۲	$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
۳	$A = B \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1, \Rightarrow x + y + z = 1z = -2$	

$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$	۴
$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A = 4 \times 4 \times 4 - 0 = 64$	۵
$\begin{bmatrix} 4-2b & a+2 \\ 12+2b & 3a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+2=0 \rightarrow a=-2 \\ 12+2b=0 \rightarrow b=-6 \end{cases}$	۶
$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$	۷
$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	۸
شرط نداشتن جواب: $\frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{1}{3} \quad (۱.۱)$ اکنون m را بدست می آوریم: $\frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \Rightarrow m(m-1) = 2 \Rightarrow m = 2, m = -1$ با جایگذاری m در (۱.۱) در هر دو حالت دستگاه جواب ندارد.	۹
$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow o(0,0), r = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \rightarrow o'(3,1), r' = 1$	۱۰
دو دایره متخارج اند $d = oo' = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}, r+r' = 2, r-r' = 0 \rightarrow d > r+r' \rightarrow$ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ $y=0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 4 \rightarrow (x-2)^2 = 3 \rightarrow x-2 = \pm\sqrt{3} \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ دایره فوق محور x ها را در نقاط $A(2-\sqrt{3}, 0)$ و $B(2+\sqrt{3}, 0)$ قطع می کند. محل برخورد با محور y ها داریم: $X=0 \rightarrow (y+1)^2 = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$	۱۱
$a^2 + b^2 - 4c = 9 + 25 - 4a > 0 \rightarrow a < \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$	۱۲
مرکز این دایره وسط AB و شعاع نصف طول پاره خط AB است. $M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{1-3}{2} \right) =$ $(3, -1)$	۱۳
$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{5} \rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$	

	$O(1, -2)$, خط مماس: $-3x + 4y - 4 = 0$ محاسبه شعاع (فاصله مرکز از خط): فرمول فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ با $y_0 = -2, x_0 = 1, C = -4, B = 4, A = -3$: $d = \frac{ (-3)(1) + 4(-2) - 4 }{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$ $d = \frac{ -3 - 8 - 4 }{\sqrt{9 + 16}} = \frac{ -15 }{5} = 3$ پس شعاع $r = 3$. معادله دایره: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$	۱۴
	حل: معادله دایره: مرکز دایره: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = 2 \text{ و } o(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = (0, 1)$ پس دایره مرکز $(0, 1)$ و شعاع $r = 2$. معادله خط: $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$ به صورت استاندارد: $x + y - 4 = 0$. فاصله مرکز دایره تا خط: فرمول فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ با $C = -4, B = 1, A = 1$ و مرکز $(0, 1)$: $d = \frac{ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 4 }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{ 1 - 4 }{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ چون $d > r$, خط خارج از دایره است.	۱۵
امضاء:	نام و نام خانوادگی مصحح :	جمع بارم : ۲۰ نمره